

# Berechnung der magnetischen Momente, Quadrupolmomente und angeregten Zustände einiger leichter Kerne

Von R. SCHULTEN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 8a, 759—775 [1953]; eingegangen am 7. Juli 1953)

Die Zustände der Kerne der  $2P$ -Schale werden durch die energetisch günstigste Mischung aller Annäherungsfunktionen dargestellt, die sich aus den Oszillatoreigenfunktionen des Einteilchenmodells unter Berücksichtigung einer Spin-Bahn-Kopplung aufbauen lassen. Mit Hilfe der gewonnenen Zustandsfunktionen für die Kerne werden ihre magnetischen Momente, Quadrupolmomente und einige angeregte Zustände ausgerechnet.

Zusammenfassung der in der Arbeit verwendeten Abkürzungen und Symbole	$\mu; \mathfrak{M}$	Operator bzw. Matrix des magnetischen Momentes im spektroskopischen Sinne
$L_{2j; 2j_z}^+; L_{2j; 2j_z}^0$	$P_\sigma; P_\tau$	Spin-bzw. Isotopenspin austauschoperator
$m$	$V_w; \mathfrak{V}_w$	Wigner-Potential bzw. zugehörige Matrix
$\omega$	$V_h; \mathfrak{V}_h$	Heisenberg-Potential bzw. zugehörige Matrix
$\hbar$	$V_b; \mathfrak{V}_b$	Bartlett-Potential bzw. zugehörige Matrix
$\delta^+; \delta^-$	$V_m; \mathfrak{V}_m$	Majorana-Potential bzw. zugehörige Matrix
$t^+; t^0$	$V_{SB}; \mathfrak{V}_{SB}$	Spin-Bahn-Kopplungspotential bzw. zugehörige Matrix
$j$	$e^{-\beta r_{12}} = J(r_{12})$	Radialanteil der Wechselwirkungspotentiale
$J$	$\frac{1}{\sqrt{\beta}}; V_0$	Reichweite bzw. Potentialtiefe der Kernkräfte
$l$	$E_0$	In der Arbeit benutzte Energieeinheit
$\vec{j}_{xi}$	$I_i; I_i^{SB}$	Integrale der Matrixelemente der potentiellen Energie
$\vec{J}_{xi}$	$\Phi_i$	Annäherungsfunktionen
$\vec{l}_{xi}$	$\gamma_i$	Mischungskoeffizienten der Annäherungsfunktionen
$\sigma_{xi}$	$\vec{\Gamma}_i$	Lösungsvektoren für die Zustände der Kerne
$A$	$A_i$	Energieeigenwerte
$\vec{M}$	$\tau_{xi}$	Isotopenspinmatrizen
$\bar{g}_l; \bar{g}_s$	$\vec{T}$	Operator des Gesamtisotopenspinvektors
$\mu_0$	$\vec{(T)^2}; T(T+1)$	Matrix bzw. Eigenwerte des Quadrates des Gesamtisotopenspinvektors
$\mu_p; \mu_n$		
$Q; \mathfrak{Q}$		

Von den Eigenschaften der Kerne sind heute außer den Bindungsenergien die magnetischen Momente und die Gesamtdrehimpulse am besten bekannt. Die Zusammenfassung dieser Werte von Mack<sup>1</sup> zeigt, daß durch neu eingeführte Meßmethoden eine Bestimmung der magnetischen Momente

vieler Kerne mit einer Genauigkeit von mindestens 1% möglich ist. Dagegen ist eine genaue Deutung dieser Ergebnisse durch die Theorie bis heute nicht

<sup>1</sup> J. E. Mack, Rev. mod. Physics 22, 1, 64 [1950].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

gelungen, weil die Kenntnisse über die Nukleonenwechselwirkung noch zu unvollständig sind. Immerhin hat man durch die einfache Annahme des „Einteilchenmodells“ ein grobes Bild von der Struktur der Atomkerne gewonnen, das qualitativ gute Aussagen über die magnetischen Momente bringt.

Das Einteilchenmodell ist auf die (ug)- und (gu)-Kerne anwendbar. Für einen (ug)-Kern z. B., der eine ungerade Anzahl von Protonen und eine gerade Anzahl von Neutronen enthält, nimmt man vereinfachend an, daß je zwei Neutronen eine abgesättigte „Unterschale“ bilden und so zu den elektromagnetischen Eigenschaften des Kerns keinen Beitrag liefern. Auch die Protonen sollen sich paarweise absättigen, so daß nur ein übrigbleibendes unpaariges Proton das magnetische Moment und das Quadrupolmoment erzeugen soll. Entsprechendes gilt für einen (ug)-Kern. Für die (uu)-Kerne nimmt man bei dieser Beschreibung an, daß die elektromagnetischen Eigenschaften der Kerne von zwei unpaarigen Nukleonen herrühren, während die anderen in paariger Anzahl vorhandenen Protonen und Neutronen einen abgesättigten Kernrumpf bilden. Zu der Annahme, daß sich eine gerade Anzahl von Protonen und Neutronen in hohem Maße absättigt, kommt man vor allem durch die empirische Erkenntnis, daß für alle (gg)-Kerne Gesamtdrehimpuls und magnetisches Moment verschwinden.

Die obigen Vorstellungen des Einteilchenmodells führen bekanntlich zu den Schmidt-Schülerschen Linien<sup>2</sup>, die das magnetische Moment eines Kernes in Abhängigkeit des Gesamtdrehimpulses des unpaarigen Leuchtnukleons, der immer mit dem Gesamtdrehimpuls des Kernes übereinstimmt, darstellen sollen. Wegen des unterschiedlichen Verhaltens des Protons bzw. Neutrons als unpaariges Leuchtnukleon erhält man für die beiden Fälle zwei verschiedene Diagramme. Diese bestehen wieder aus je zwei Linien, von denen die obere die magnetischen Momente von Leuchtnukleonen, deren Gesamtdrehimpuls sich durch  $j = l + 1/2$  darstellen läßt, wiedergeben sollte, während durch die untere der entsprechende Wert für Leuchtnukleonen mit  $j = l - 1/2$  zu finden wäre. In Wirklichkeit liegen aber die empirischen magnetischen Momente der Kerne zwischen den unteren und oberen Linien,

so daß diese lediglich als eine untere bzw. obere Grenze anzusehen sind.

Auch die Quadrupolmomente der Kerne werden durch das Einteilchenmodell nicht richtig wiedergegeben. Vor allem gelingt es mit diesen einfachen Vorstellungen nicht, die auffallend großen Werte für viele schwere Kerne zu erklären.

Durch eine Arbeit von Bohr<sup>3</sup> ist das Einteilchenmodell für schwere Kerne verfeinert worden. Hier wird angenommen, daß das unpaarige Nukleon eines (gu)- oder (ug)-Kernes bei der Bewegung im Felde des Kernrumpfes diesen zylindersymmetrisch deformiert. Als neue Bewegungsmöglichkeit tritt die Rotation des zylindersymmetrischen Kernrumpfes hinzu, die mit dem Bahndrehimpuls und dem Spin des Leuchtnukleons auf verschiedene Arten zum Gesamtdrehimpuls zusammengesetzt werden kann. In den Fällen, in denen man annehmen kann, daß die Präzessionsgeschwindigkeit der Achse des Kernrumpfes um die Richtung des Gesamtdrehimpulses klein ist im Vergleich zu der Geschwindigkeit, mit der der Bahndrehimpuls des Leuchtnukleons um die Achse präzessiert, erhält man  $g$ -Faktoren, mit denen man die Abweichungen der magnetischen Momente schwerer Kerne von den Schmidt-Schülerschen Werten zum Teil erklären kann.

Eine genauere Berechnung der magnetischen Momente und Quadrupolmomente ist jedoch bei den leichten Kernen möglich, wenn man die Bahnen aller Nukleonen in der letzten, nicht abgesättigten Schale eines Kerns berücksichtigt. Solche Rechnungen sind in der Vergangenheit u. a. von Bethe und Rose<sup>4</sup>, Inglis<sup>5</sup>, Phillips<sup>6</sup> und Sachs<sup>7</sup> durchgeführt worden. Als Wechselwirkung zwischen je zwei Nukleonen wurden dabei Wigner-, Heisenberg-, Bartlett- und Majorana-Kräfte angenommen und nach dem Hartree-Modell die magnetischen Momente einiger leichter Kerne bestimmt.

Die Ergebnisse zeigten aber im allgemeinen noch keine befriedigende Übereinstimmung mit den empirisch gefundenen Werten. Deshalb soll in der vorliegenden Arbeit der Versuch gemacht werden, diese Rechnungen durch die Berücksichtigung einer starken Spin-Bahn-Kopplung zu verbessern, deren Existenz Haxel, Jensen und Suess<sup>8</sup> und Goeppert-

<sup>2</sup> T. Schmidt, Z. Physik **106**, 358 [1937].

<sup>3</sup> A. Bohr, Physic. Rev. **81**, 333 und **81**, 134 [1951].

<sup>4</sup> H. A. Bethe u. M. E. Rose, Physic. Rev. **51**, 205 [1937].

<sup>5</sup> D. R. Inglis, Physic. Rev. **53**, 880 [1938].

<sup>6</sup> M. Phillips, Physic. Rev. **57**, 170 [1940].

<sup>7</sup> R. G. Sachs, Physic. Rev. **69**, 611 [1946].

<sup>8</sup> O. Haxel, J. H. O. Jensen u. M. G. Suess, Z. Physik, **128**, 295 [1950].

Mayer<sup>9</sup> für die Bewegung der Nukleonen im Kern wahrscheinlich gemacht haben. Die erwähnten Autoren konnten zeigen, daß man mit dieser Annahme den Aufbau der Atomkerne, insbesondere die Besetzungszahlen der abgeschlossenen Schalen, recht gut verstehen kann.

Im Gegensatz zu der Elektronenhülle, in der sich zunächst die Bahndrehimpulse  $l_i$  bzw. Spins  $s_i$  der Elektronen zu einem Gesamtbahndrehimpuls  $L$  bzw. Gesamtspin  $S$  koppeln, die sich dann ihrerseits zum Gesamtdrehimpuls  $J$  zusammensetzen (Russell-Saunders-Kopplung), findet man in schweren Kernen auf Grund der starken Spin-Bahn-Kopplung zunächst eine Zusammensetzung der  $l_i$  und  $s_i$  zu dem Gesamtdrehimpuls  $j_i$  der einzelnen Nukleonen. Die  $j_i$  koppeln sich dann untereinander und bilden dabei den Gesamtdrehimpuls  $J$  des Kernes [ $(jj)$ -Kopplung].

Die leichten Kerne stellen, da sich in ihnen die Spin-Bahn-Wechselwirkung etwa mit der gleichen Größenordnung wie die anderen Kräfte auswirkt, einen mittleren Fall zwischen den beiden Grenzfällen, der Russell-Saunders-Kopplung und der  $(jj)$ -Kopplung, dar, den man eine „gemischte Kopplung“ nennen kann.

Für die Darstellung der Zustände der einzelnen Nukleonen in der ersten und zweiten Schale sollen in den folgenden Rechnungen nur die Oszillatorenigenfunktionen des Einteilchenmodells, die den Bahndrehimpuls  $l = 0$  oder  $1$  haben, benutzt werden. Aus diesen Funktionen kann man eine Anzahl von Wellenfunktionen zur Annäherung des Grundzustandes unter Berücksichtigung des Gesamtdrehimpuls- und Isotopenspinerhaltungssatzes für einen bestimmten Kern zusammenstellen. Dann ist die Darstellung des Grundzustandes die energetisch günstigste Mischung dieser Annäherungsfunktionen. Beiträge von Funktionen, die Nukleonenzustände mit  $l > 1$  enthalten, sollen also nicht berücksichtigt werden. Ihre Anteile können für unsere Zwecke nur dann von Wichtigkeit sein, wenn die aus Nukleonenzuständen mit  $l = 0; 1$  aufgebauten Funktionen extrem kleine Werte für das Quadrupolmoment oder das magnetische Moment ergeben. Ein Beispiel, in dem die höheren Funktionen eine Rolle spielen, ist das Quadrupolmoment des Deuterons. Nach Rarita und Schwinger<sup>10</sup> besteht der Grundzustand des Deuterons zu 96% aus einem  $S$ -Zustand und zu

4% aus einem  $D$ -Zustand. Nur auf den letzteren ist das Quadrupolmoment zurückzuführen.

In den folgenden Rechnungen werden die Annäherungsfunktionen mit  $l > 1$  also nicht berücksichtigt, da sie einen zu hohen Rechenaufwand erfordern und für die Bestimmung der magnetischen Momente und Quadrupolmomente der betrachteten Kerne von untergeordneter Bedeutung sind.

### 1. Bestimmung der Kernzustände durch Variation der Gesamtenergie

Die Wellenfunktionen der Zustände eines Kerns lassen sich bekanntlich durch eine endliche Summe von Produkten der Einzelteilchenfunktionen annähern. Die Willkür in der Wahl solcher Funktionen wird durch drei Forderungen eingeschränkt. Zunächst müssen darin der Gesamtdrehimpuls und eine seiner Komponenten aus allgemein physikalischen Gründen als Bewegungskonstanten, d. h. Quantenzahlen dargestellt sein. Dann folgt aus der in dieser Arbeit vorausgesetzten Symmetrie der Wechselwirkung von Protonen und Neutronen (unter Vernachlässigung der Coulomb-Energie für leichte Kerne), daß auch der Isotopenspin eine Quantenzahl ist. Und schließlich gilt für die Nukleonen das Pauli-Prinzip. D. h. die Gesamtwellenfunktionen der Kernzustände müssen antimetrisch sein in bezug auf die Vertauschung der Gesamtheit der Koordinaten zweier Nukleonen. Diese Einschränkungen führen zu einer Anzahl von normierten und orthogonalen Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  zur Annäherung des Kernzustandes, deren Bestimmung im nächsten Abschnitt näher erläutert wird, mit vorgegebenem Gesamtdrehimpuls  $J$  und Isotopenspin  $T$ , so daß die gesuchte Gesamtfunktion durch

$$\Phi = \sum_{i=0}^n \gamma_i \Phi_i \quad (1)$$

dargestellt werden kann. Die Mischungskoeffizienten  $\gamma_i$  sollen mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens so bestimmt werden, daß die Gesamtenergie  $E$  zum Minimum wird. Mit der Funktion  $\Phi$  erhält man

$$E = \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 \langle \Phi_i | E_{\text{kin}} | \Phi_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_i \gamma_k \langle \Phi_i | E_{\text{pot}} | \Phi_k \rangle. \quad (2)$$

<sup>9</sup> M. Goeppert-Mayer, Physic. Rev. 75, 1969 [1949].  
<sup>10</sup> W. Rarita u. J. Schwinger, Physic. Rev. 59, 436 [1941].

Hier bedeuten die Winkelklammern die Erwartungswerte und Übergangselemente der Operatoren der kinetischen bzw. potentiellen Energie für die Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ . Für alle hier in Betracht kommenden Fälle sind die Nukleonenzustände mit  $l = 0$  voll aufgefüllt, während die nichtabgeschlossene  $P$ -Schale mit einer festen Anzahl von Nukleonen besetzt ist. Höhere Näherungen mit Nukleonenzuständen mit  $l > 1$  sollen vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung sind die Erwartungswerte für die kinetische Energie

$$\langle \Phi_i | E_{\text{kin}} | \Phi_i \rangle$$

für alle Funktionen  $\Phi_i$  gleich, und man kann, da  $\sum (\gamma_i)^2 = 1$  gelten muß,  $E_{\text{kin}}$  als Konstante auf die linke Seite schreiben. Die Normierungsbedingung

$$\sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 = 1 \quad (3)$$

wird mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikators  $A$  eingeführt:

$$E - E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_i \gamma_k \langle \Phi_i | E_{\text{pot}} | \Phi_k \rangle - A \left( \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 - 1 \right). \quad (4)$$

Die Variation der Mischungskoeffizienten  $\gamma_i$  führt auf das  $n$ -dimensionale Eigenwertproblem

$$\sum_{i=1}^n \langle \Phi_i | E_{\text{pot}} | \Phi_k \rangle \gamma_i = A \gamma_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

mit  $n$  Eigenwerten  $A_l$  und den dazu gehörigen Eigenvektoren:

$$\vec{\Gamma}_l = (\gamma_1^{(l)}; \gamma_2^{(l)}; \dots; \gamma_n^{(l)}). \quad (6)$$

Die Eigenwerte  $A_l$  entsprechen den Energiewerten der Zustände eines Kerns. Mit Hilfe der Vektoren  $\vec{\Gamma}_l = (\gamma_1^{(l)}; \gamma_2^{(l)}; \dots; \gamma_n^{(l)})$  können die Erwartungswerte  $A_l$  eines Operators  $A$  für den  $l$ -ten Zustand

$$A_l = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \Phi_i | A | \Phi_k \rangle \gamma_i^{(l)} \gamma_k^{(l)} \quad (7)$$

gewonnen werden.

## 2. Bestimmung der Annäherungsfunktionen

Der Aufbau der im 1. Abschnitt mit  $\Phi_n$  bezeichneten Annäherungsfunktion erfolgt in drei Schritten. Man geht von den Wellenfunktionen der einzelnen Nukleonenzustände aus. Aus diesen werden,

um die Antisymmetrie der Gesamtwellenfunktionen zu erreichen, in der bekannten Weise Determinantenfunktionen gebildet. Schließlich setzen sich die Annäherungsfunktionen  $\Phi_n$  aus einer Summe solcher Determinantenfunktionen mit bestimmten Koeffizienten zusammen. Die Bestimmung der Koeffizienten erfolgt durch die Forderungen des Gesamtdrehimpuls- und Isotopenspinerhaltungssatzes.

### a) Die Wellenfunktionen der Nukleonen

Geeignete Funktionen für die Zustände der einzelnen Nukleonen erhält man aus den Vorstellungen des Einteilchenmodells. In diesem Modell<sup>11</sup> wird angenommen, daß die einzelnen Nukleonen eines Kerns sich näherungsweise unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Kernfelde bewegen. Diese Überlegung führt bekanntlich zu einem Schalenaufbau der Atomkerne ähnlich dem der Elektronenhülle. Als brauchbare Idealisierung für das Kernfeld leichter Kerne erweist sich das Potential des isotropen harmonischen Oszillators, welches den langsamsten Abfall der Potentials und der Dichte am Kernrand in guter Näherung darstellt. Die Wellenfunktionen der Nukleonen, die sich in diesem Potentialtopf bewegen, sind die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators. Aus diesen Funktionen und den Spin- und Isotopenspin-Koordinaten sollen die Wellenfunktionen der einzelnen Nukleonen der ersten und zweiten Schale aufgebaut werden. Dabei benutzt man wegen der Spin-Bahn-Kopplungswechselwirkung im Kern zweckmäßig die Darstellung in der  $(jj)$ -Kopplung.

Die für die Elektronenhülle übliche Bezeichnungsweise der Zustände  $2S+1 L_j$  kann wegen der  $(jj)$ -Kopplung hier nicht beibehalten werden. Statt dessen ist folgende Bezeichnungsweise zweckmäßig

$$\begin{aligned} \text{Protonenzustände: } & L_{2j; 2j_z}^+ \\ \text{Neutronenzustände: } & L_{2j; 2j_z}^0 \end{aligned} \quad (8)$$

Hier ist  $j$  der Gesamtdrehimpuls des beschriebenen Nukleons und  $j_z$  seine Komponente in der  $z$ -Richtung. Die Zeichen + bzw. 0 deuten den Protonen- bzw. Neutronenzustand an.  $L$  ist die für die Elektronenhülle übliche Bezeichnung des Bahndrehimpulses, für die hier entsprechend der Buchstabe  $S$  für die Zustände der ersten Schale und  $P$  für die der zweiten Schale verwendet werden soll.

Der Spin der Nukleonen wird in der gewohnten Weise durch die Vektoren

<sup>11</sup> Z. B. H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. mod. Physics 8, § 32 [1936].

$$\delta^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s = +1/2, \quad (9)$$

$$\delta^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } s = -1/2$$

dargestellt und die Isotopenspin-Vektoren, die ausdrücken, ob es sich bei dem betrachteten Nukleon um ein Proton oder Neutron handelt, sind

$$t^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für ein Proton,} \quad (10)$$

$$t^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für ein Neutron.}$$

Für die erste Energiestufe des harmonischen Oszillators ergibt sich die Eigenfunktion

$$g_0(r) = \left( \frac{\sqrt{a}}{\pi} \right)^3 \cdot e^{-(a/2)r^2} \text{ mit } a = \frac{m\omega}{\hbar} \quad (11)$$

( $m$  = Nukleonenmasse,  $\omega$  = Frequenz des harmonischen Oszillators). Mit dieser Funktion lassen sich für die erste Schale vier Nukleonenfunktionen aufstellen (Tab. 1).

a) Protonenfunktionen	b) Neutronenfunktionen	$j$	$j_z$
$S_{1,1}^+ = \delta^+ t^+ g_0(r)$	$S_{1,1}^0 = \delta^+ t^0 g_0(r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$S_{1,-1}^+ = \delta^- t^+ g_0(r)$	$S_{1,-1}^0 = \delta^- t^0 g_0(r)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Tab. 1. Eigenfunktionen der 1  $s$ -Schale.

Die zweite Energiestufe des harmonischen Oszillators ergibt die drei winkelabhängigen Funktionen:

$$g_{1,0} = \sqrt{a} r \cos \vartheta g_0(r),$$

$$g_{1,1} = \sqrt{a} r \sin \vartheta e^{i\varphi} g_0(r), \quad (12)$$

$$g_{1,-1} = \sqrt{a} r \sin \vartheta e^{-i\varphi} g_0(r).$$

(Für  $g_{l,m}$  bedeutet  $l$  den Drehimpuls,  $m$  die Komponente in der  $z$ -Richtung.)

Zusammen mit den Spin- und Isotopenspin-Vektoren ergeben diese drei Funktionen die zwölf Nukleonenzustände der zweiten Schale (Tab. 2).

$j$  und  $j_z$  sind bei dieser Einführung der  $(jj)$ -Kopplung „gute“ Quantenzahlen im Gegensatz zu  $l_z$  und dem Spin. Obwohl aber über die Richtung von  $\vec{l}$  und  $\vec{s}$  keine Aussage mehr möglich ist, ersieht man aus der Größe des Gesamtdrehimpulses, daß die Funktionen der ersten beiden Zeilen Nukleonen mit antiparallelem Spin- und Bahndrehimpuls beschreiben, während bei den übrigen Zuständen Spin- und Bahndrehimpuls parallel stehen. Die Spin-Bahn-Kopplung, die in den späteren Rechnungen als Wechselwirkungsanteil von je zwei Teilchen eingeführt wird und die Parallelstellung von  $\vec{l}$  und  $\vec{s}$  energetisch bevorzugt, wird also beim Aufbau der zweiten Schale Nukleonen in den Zuständen 3 bis 6 vor solchen in den Zuständen 1, 2 begünstigen.

### b) Das Pauli-Prinzip

Bei der Zusammenstellung der Nukleonenfunktionen zu Annäherungsfunktionen der Kernzustände müssen diese als Beschreibung eines Verbandes von Fermi-Teilchen noch antimetriert werden. Das geschieht bekanntlich durch die Determinantenschreibweise. Ein Kern, der z. B. aus 6 Nukleonen besteht, mit den 4 Zuständen der ersten Schale und  $P_{1,1}^+$  und  $P_{1,1}^0$ , hat die Funktionsdeterminante:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6!}} \begin{vmatrix} S_{1,1}^+(q_1); S_{1,1}^0(q_1) & \dots & P_{1,1}^+(q_1); P_{1,1}^0(q_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{1,1}^+(q_6); S_{1,1}^0(q_6) & \dots & P_{1,1}^+(q_6); P_{1,1}^0(q_6) \end{vmatrix} \quad (13)$$

	a) Protonenfunktionen	b) Neutronenfunktionen	$j$	$j_z$
1.	$P_{1,1}^+ = t^+ \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta^+ g_{1,0} + \delta^- g_{1,1})$	$P_{1,1}^0 = t^0 \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta^+ g_{1,0} + \delta^- g_{1,1})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2.	$P_{1,-1}^+ = t^+ \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta^+ g_{1,-1} - \delta^- g_{1,0})$	$P_{1,-1}^0 = t^0 \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta^+ g_{1,-1} - \delta^- g_{1,0})$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3.	$P_{3,3}^+ = t^+ \delta^+ g_{1,1}$	$P_{3,3}^0 = t^0 \delta^+ g_{1,1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
4.	$P_{3,1}^+ = t^+ \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta^- g_{1,1} - 2 \delta^+ g_{1,0})$	$P_{3,1}^0 = t^0 \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta^- g_{1,1} - 2 \delta^+ g_{1,0})$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
5.	$P_{3,-1}^+ = t^+ \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta^+ g_{1,-1} + 2 \delta^- g_{1,0})$	$P_{3,-1}^0 = t^0 \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta^+ g_{1,-1} + 2 \delta^- g_{1,0})$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
6.	$P_{3,-3}^+ = t^+ \delta^- g_{1,-1}$	$P_{3,-3}^0 = t^0 \delta^- g_{1,-1}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Tab. 2. Eigenfunktionen der 2  $p$ -Schale.

( $q_i$  = Gesamtheit der Koordinaten, Raum, Spin und Isotopenspin).

Für diese Determinante empfiehlt sich folgende Schreibweise:

$$\Psi = \{S_{1,1}^+; S_{1,1}^0; \dots; P_{1,1}^+; P_{1,1}^0\}, \quad (14)$$

die noch verkürzt werden soll zu:

$$\Psi = \{P_{1,1}^+; P_{1,1}^0\}. \quad (15)$$

In dem letzten Ausdruck sind die Funktionssymbole der  $S$ -Zustände ausgelassen, weil diese Determinantenkolonnen bei allen hier in Betracht kommenden Funktionen dieselben sind.

c) Zusammenstellung der Determinanten zu Annäherungsfunktionen mit Hilfe der Erhaltungssätze

Die Annäherungsfunktionen  $\Phi_n$  werden aus den in b) eingeführten Determinanten am zweckmäßigsten auf folgende Weise gewonnen: Man sucht zunächst alle Determinanten für einen Kern mit bestimmter Anzahl von Protonen und Neutronen mit gleichen  $J_z$  auf. Es gilt nämlich für jede Determinante

$$J_z = j_{z_1} + j_{z_2} + \dots + j_{z_n} \quad (16)$$

( $J_z$  ist die  $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpulses des Kerns;  $j_{z_i}$  sind die  $z$ -Komponenten des Gesamtdrehimpulses der einzelnen Nukleonen).

Die Anzahl der Determinantefunktionen  $\Psi_k$  ist gleich der Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten von  $J_z$  durch eine Summe der  $j_{z_i}$  (unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips).

Diese Anzahl möge =  $m$  sein, dann ist:

$$\Phi(J_z) = \sum_{k=1}^m c_k \Psi_k(J_z). \quad (17)$$

Ist der Gesamtdrehimpuls  $J$  eines Kernes fest vorgegeben, dann kann  $J_z$  nur die Werte

$$-J; -J+1; \dots; J-1; J \quad (18)$$

annehmen. Eine bestimmte Wahl von  $J_z$  bedeutet nur eine gewisse Orientierung des Gesamtdrehimpulsvektors  $\vec{J}$  gegenüber dem angenommenen Koordinatensystem. In bezug auf diese Orientierung sind alle meßbaren Größen des Kerns invariant. Wählt man nun  $J_z = J$ ; d. h. legt man das Koordinatensystem so fest, daß der Vektor  $\vec{J}$  in die positive

Richtung der  $z$ -Achse zeigt, dann muß für  $\Phi$  gelten<sup>12</sup>:

$$\bar{J}^+ \Phi(J_z = J) = 0 \text{ mit } \bar{J}^+ = \bar{J}_x + i \bar{J}_y. \quad (19)$$

Man kann zeigen, daß diese Forderung dem Eigenwertproblem

$$(\vec{J})^2 \Phi = J(J+1) \Phi, \quad (20)$$

also dem Gesamtdrehimpulserhaltungssatz äquivalent ist. Durch die Anwendung des Operators  $\bar{J}^+$  geht die Funktion  $\Phi$  in eine andere Linearkombination von Determinanten  $\Psi'_i$  mit  $J'_z = J_z + 1$  über, deren Koeffizienten identisch 0 sein müssen, und deren Anzahl  $m'$  sei. So erhält man für die Koeffizienten aus Gleichung (17)  $m'$  Bedingungsgleichungen, so daß nur noch  $(m - m')$  Koeffizienten frei gewählt werden können.

Eine weitere Einschränkung der noch freien Koeffizienten bringt der Isotopenspinerhaltungssatz, der durch die in den späteren Rechnungen vorausgesetzte Symmetrie der Kernkräfte in bezug auf Protonen und Neutronen gefordert wird. Wie schon erwähnt, wird dabei der Einfluß der Coulomb-Kräfte vernachlässigt, was natürlich nur bei leichten Kernen Berechtigung hat. Bei diesen darf man deshalb erwarten, daß der Isotopenspinerhaltungssatz in einer gewissen Näherung erfüllt ist.

Der Operator des Gesamtisotopenspinvektors eines Kernes mit  $n$  Nukleonen wird durch<sup>12</sup>

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i \quad (21)$$

dargestellt. Dabei sind die Komponenten  $\tau_i^x; \tau_i^y; \tau_i^z$  die Isotopenspinmatrizen des  $i$ -ten Nukleons, die bekanntlich völlig analog zu den Paulischen Spinnmatrizen gebildet werden können und den Relationen:  $\tau_i^x \times \tau_i^y = i \tau_i^z$  (und zyklisch vertauscht) und  $(\tau_i^x)^2 = (\tau_i^y)^2 = (\tau_i^z)^2 = 1$  gehorchen.

Die  $z$ -Komponente des Isotopenspins gibt anschaulich gesprochen den Überschuß an Protonen bzw. Neutronen an. Ist z. B. für einen Kern  $T_z = k/2$ , so bedeutet dies, wenn  $k > 0$  ist, ein Überschuß von  $k$  Protonen, wenn  $k < 0$  ist, ein Überschuß von  $k$  Neutronen. Die  $z$ -Komponente ist also für alle Kerne eine Quantenzahl.

Ganz analog zum Gesamtdrehimpuls bildet man die Operatoren:

$$\bar{T}^+ = \bar{T}_x + i \bar{T}_y; \bar{T}^- = \bar{T}_x - i \bar{T}_y. \quad (22)$$

<sup>12</sup> E. K. Condon u. G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge, Univ. Press 1951.

Die Anwendung der Operatoren  $\overline{T^+}$  und  $\overline{T^-}$  auf die Funktion

$$\Phi(T_z) = \sum_{k=1}^m c_k \Psi_k(T_z) \quad (23)$$

führt diese in eine andere Linearkombination von Determinanten  $\Psi'_i$  mit  $T_z + 1$  bzw.  $T_z - 1$  über. Wählt man nun z. B. bei Neutronenüberschuß  $T_z = T$ , d. h. legt man das Koordinatensystem des Isotopenspinraumes so fest, daß der Vektor  $\vec{T}$  in die negative  $z$ -Richtung zeigt, dann muß für  $\Phi(T_z)$  analog zu Gl. (19) gelten:

$$\overline{T^-} \Phi(T_z) = 0. \quad (24)$$

Die Anzahl der Determinanten  $\Psi'_i(T_z - 1)$ , in die hierbei die Determinanten  $\Psi'_k(T_z)$  übergeführt werden, möge  $r$  sein. Dann ergibt Gl. (24) weitere  $r$  Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten  $c_k$  aus Gl. (17). Nach diesem Schritt bleiben nur noch  $(m - m' - r)$  Koeffizienten in Gl. (17) frei. Die übrigen  $m' + r$  Koeffizienten können durch die Bedingungsgln. (19) und (24) eliminiert und in Abhängigkeit der noch freien Koeffizienten dargestellt werden. So erhält man  $(m - m' - r)$  linear unabhängige Annäherungsfunktionen, deren Koeffizienten man durch ein Variationsverfahren nach Abschnitt 1 für die Zustände von Kernen festlegen kann.

Die Anwendung der Gln. (19) und (24) wird übersichtlicher, wenn man die Determinantefunktionen in bezug auf die Anzahl der Nukleonenzustände mit antiparallelem  $\vec{l}$  und  $\vec{s}$  in verschiedene Gruppen einteilt. Die Gruppen mögen durch  $A =$  Anzahl der Nukleonenzustände mit  $\vec{l}$  antiparallel  $\vec{s}$  gekennzeichnet sein. Eine Determinantefunktion einer bestimmten Gruppe dieser Art kann durch die Operatoren  $\overline{J^+}$ ,  $\overline{J^-}$  und  $\overline{T^+}$ ,  $\overline{T^-}$  nur wieder in eine Funktion derselben Gruppe übergeführt werden. Gibt es für ein Kernproblem  $p$  solche Gruppen, dann zerfallen die Gln. (19) und (24) in  $p$  solche Gleichungssysteme.

Es sei noch erwähnt, daß man die Zustände mit  $J_z \neq J$  aus den obigen durch ein- oder mehrmaliges Anwenden des Operators  $\overline{J^-}$  erhält, wobei allerdings die Normierung nicht erhalten bleibt.

Ebenso ergeben sich die Annäherungsfunktionen mit  $T_z \neq T$  durch Anwendung der Operatoren  $\overline{T^+}$  bzw.  $\overline{T^-}$  auf die Funktionen mit  $T_z = T$ . Sucht man z. B. die Annäherungsfunktion des Kernes Li<sup>6</sup> mit

$T = 1$ , dessen  $T_z = 0$  ist, so geht man am besten von den Funktionen des Kernes Be<sup>6</sup> aus (für ihn gilt  $T_z = T = 1$ ), aus denen man die gesuchten Funktionen des Kernes Li<sup>6</sup> durch einmaliges Anwenden des Operators  $\overline{T^-}$  gewinnt.

### 3. Das magnetische Moment und das Quadrupolmoment

Das magnetische Moment des  $i$ -ten Nukleons eines Kerns wird durch den Ausdruck

$$\vec{M} = \left( \bar{g}_{l_i} \frac{1}{\hbar} \vec{l}_i + \frac{1}{2} \bar{g}_{s_i} \sigma_i \right) \mu_0 \quad (25)$$

dargestellt. Seine Maßeinheit ist das Bohrsche Kernmagneton  $\mu_0$ . Die  $g$ -Faktoren  $\bar{g}_{l_i}$  und  $\bar{g}_{s_i}$  sind hier als Operatoren geschrieben, um eine symmetrische Schreibweise für Proton und Neutron zu erhalten. Für diese gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{g}_l t^+ &= t^+; \quad \bar{g}_l t^0 = 0; \\ \bar{g}_s t^+ &= \mu_p t^+; \quad \bar{g}_s t^0 = \mu_n t^0 \end{aligned} \quad (26)$$

mit  $\mu_p = 5,5792$ ,  $\mu_n = -3,8206$ .

Der erste Anteil von  $\vec{M}$  stammt von dem Bahndrehimpuls des geladenen Protons her. Er verschwindet für das Neutron. Der zweite Summand  $\bar{g}_{s_i} \vec{\sigma}_i$  hängt mit dem Spin der Nukleonen zusammen. Das Gesamtmoment des Kerns setzt sich vektoriell aus den einzelnen Momenten  $\vec{M}_i$  zusammen.

Dabei soll von einer Veränderung der magnetischen Momente des Protons und des Neutrons durch das Mesonenfeld des Kernes, von der in der Literatur<sup>13</sup> gesprochen wurde, abgesehen werden. Eine solche Veränderung sollte von der Größenordnung des Verhältnisses der Bindungsenergie eines Nukleons im Kern zu der Ruheenergie des  $\pi$ -Mesons sein; also höchstens von einigen Prozent. Da sich aber durch die in der Arbeit verwandten Rechnungen aus anderen Gründen nur eine Genauigkeit von etwa 5% erreichen läßt, darf dieser Einfluß mit Recht vernachlässigt werden.

Die Projektion von  $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$  auf den Kerndrehimpuls ist bekanntlich das magnetische Moment  $\mu$  im spektroskopischen Sinne. Der Erwartungswert dieser Größe ist<sup>4</sup>

$$\mu = \frac{1}{J+1} \langle \vec{J} \cdot \vec{M} \rangle \quad (27)$$

(Winkelklammern bedeuten die Erwartungswerte).

<sup>13</sup> H. Miyazawa, Proc. theor. Physics 2, 207 [1952].

Zur Berechnung dieses Wertes führt man zweckmäßig folgende Umformung für die  $\vec{M}_i$  ein:

$$\vec{M}_i = \left( \frac{1}{\hbar} \vec{g}_{l_i} \vec{j}_i + \frac{1}{2} (\vec{g}_{s_i} - \vec{g}_{l_i}) \vec{\sigma}_i \right) \mu_0. \quad (28)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (27) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{J+1} \left( \frac{1}{\hbar^2} \langle \vec{g}_l (\vec{J})^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\hbar} \frac{1}{2} \langle (\vec{g}_s - \vec{g}_l) \vec{J} \vec{\sigma} \rangle \right) \mu_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Diese Größe ist das magnetische Moment, das in den Messungen angegeben wird. Sie enthält nur solche Operatoren, die sich auf Winkel, Spin und Isotopenspin-Koordinaten beziehen, und ist deshalb von dem Ortsanteil der Wellenfunktionen unabhängig. Ebenso ist sie invariant gegenüber einer beliebigen Orientierung von  $\vec{J}$  im Raum.

Dagegen ist die Darstellung des Quadrupolmoments von einer bestimmten Einstellung von  $J_z$  zu  $J$  abhängig. Wählt man  $J_z = J$ , dann ist das Quadrupolmoment im spektroskopischen Sinne der Erwartungswert des Operators:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n g_{l_i} (3z_i^2 - r_i^2). \quad (30)$$

$\bar{Q}$  ist von den Ortsanteilen der Wellenfunktionen abhängig. Die Integrationen über die Radialanteile der Wellenfunktionen ergeben bei der Bildung der Erwartungswerte eine Konstante von der Dimension  $\text{cm}^2$  in der Größenordnung der Oberfläche des Atomkerns, die von der Wahl der Ortsfunktion abhängt. Eine durch Gl. (11) eingeführte Ortsfunktion  $g_0(r)$  ergibt die Konstante:

$$Q_0 = a^{-1}. \quad (31)$$

Für die folgenden Rechnungen wird  $a$  durch Vergleich der experimentell bekannten Massendefekt-differenzen von Spiegelkernen mit den entsprechenden Matrixelementen der Coulomb-Energie festgelegt. Dabei erhält man für die Kerne der  $P$ -Schale, abgesehen von individuellen Schwankungen bis zu 6%, einen durchschnittlichen Wert von:

$$Q_0 = 3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2. \quad (32)$$

#### 4. Die Wechselwirkung der Nukleonen

Durch Wigner (w), Heisenberg (h), Bartlett (b) und Majorana (m) sind folgende vier Zentralkräfte für die Nukleonen eingeführt worden:

$$V_w = -V_0 J(\mathbf{r}_{12}), \quad \text{kein Austausch}; \quad (33)$$

$$V_h = -V_0 J(\mathbf{r}_{12}) \cdot [-P_\tau(1,2)], \quad \text{Ladungsaustausch}; \quad (34)$$

$$V_b = -V_0 J(\mathbf{r}_{12}) \cdot P_\sigma(1,2), \quad \text{Spin-Austausch}; \quad (35)$$

$$V_m = -V_0 J(\mathbf{r}_{12}) \cdot [-P_\tau(1,2)] \cdot P_\sigma(1,2), \quad \text{Ladungs- und Spin-Austausch}. \quad (36)$$

$$\text{Hier ist } P_\tau(1,2) = \frac{1}{2} (1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$$

der Austauschoperator des Isotopenspins und

$$P_\sigma(1,2) = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

der Austauschoperator des Spins.  $J(\mathbf{r}_{1,2})$  ist die Ortsfunktion des Potentials und  $-V_0$  die Potentialtiefe. Die aus diesen vier Kräften resultierende potentielle Energie wird durch

$$V = w V_w + h V_h + b V_b + m V_m \quad (37)$$

dargestellt. Es ist bis heute nicht gelungen, die Konstanten  $w, h, b, m$  aus experimentellen Daten eindeutig festzulegen. Man hat oft versucht, diese durch die Ergebnisse über die Streuung von Neutronen an Protonen<sup>14</sup> und durch die Kenntnisse über den Triplett- und Singulettzustand des Deuterons zu bestimmen, sowie die Absättigung der Kernkräfte durch eine bestimmte Wahl der Konstanten zu erklären. Die Deutung der Streuexperimente und der Zustände des Deuterons ist aber empfindlich abhängig von dem Vorhandensein der nichtzentralen Kräfte zwischen den Nukleonen (Spin-Bahn-Wechselwirkung, Tensorkraft), deren Anteile nicht so genau bekannt sind, als daß eine endgültige Festlegung der Werte für  $w, h, b$  und  $m$  daraus möglich wäre.

In dieser Arbeit wurden die Konstanten so bestimmt, daß sie eine Anzahl von experimentellen Daten möglichst gut wiedergeben. Zunächst kann durch Rechnung gezeigt werden, daß das empirisch sehr kleine Quadrupolmoment des  $\text{Li}^6$  im Grundzustand ( $J = 1$ ) nur dann richtig gedeutet werden kann, wenn man den Einfluß der Tensorkraft gegenüber den anderen Kräften vernachlässigbar klein wählt. Zur weiteren Bestimmung werden die Meßergebnisse der (N-P)-Streuung, des Singulett- und Triplettzustandes des Deuterons und der Zustände des Kernes  $\text{Li}^6$  mit  $J = 1; T = 0$  und  $J = 0; T = 1$

<sup>14</sup> F. Kelly, C. Leith, E. Segré u. C. Wieland, Physic. Rev. **79**, 96 [1950]; R. S. Christian u. E. W. Hart, Physic. Rev. **77**, 441 [1949].

herangezogen, welche sich unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung (ihr Anteil wird weiter unten festgelegt) am besten durch die Konstanten:

$$w = m = 0,350 \text{ und } h = b = 0,150 \quad (38)$$

deutet lassen.

Auf die Absättigung der Kernkräfte, die nach neuerer Ansicht auf die besonders in schweren Kernen wirksamen Mehrkörperkräfte zurückzuführen ist, wurde dabei keine Rücksicht genommen.

Nimmt man als Ortsanteil der Potentiale:

$$J(r_{12}) = \exp(-\beta r_{12}^2) \quad (39)$$

$\left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ gleich Reichweite der Kernkräfte} \right),$

so kann man alle Matrixelemente der Wechselwirkung auf drei Integrale zurückführen, die mit den Abkürzungen:

$$v = a/\beta,$$

$$E_0 = -1/4 v_0 \left( \frac{v}{2+v} \right) \frac{3}{2} - \frac{1}{(2+v)^2}$$

die Werte:

$$I_1 = (3+2v+v^2) E_0, \quad I_2 = (1+v)^2 E_0, \quad I_3 = E_0 \quad (40)$$

ergeben. Nimmt man aus der Erfahrung für die Reichweite der Kernkräfte den Wert<sup>15</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

so ergibt sich für  $v = a/\beta$  mit  $a = \frac{1}{3} \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$  (s. S. 766) etwa die Größe  $v = 1,2$ .

Als eine weitere Kraft zwischen je 2 Nukleonen, die für die Struktur der Kerne nach den Arbeiten von Haxel, Jensen und Sueß<sup>8</sup> und Göppert-Mayer<sup>9</sup> wesentlich ist, soll die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt werden. Nach einer Arbeit von Gaus<sup>16</sup> erhält man:

$$V_{SB} = \pi \frac{V_0}{2\hbar\beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \{ [\text{grad}_1 J(r_{12}) \times \vec{p}_1] \\ + [\text{grad}_2 J(r_{12}) \times \vec{p}_2] \}$$

Dieser Ausdruck enthält zunächst zwei Anteile, die sich in den Rechnungen wie  $\vec{s}_i \vec{l}_i$  verhalten. Sie bedeuten eine Kopplung der Bahndrehimpulse der Nukleonen mit ihrem eigenen Spin. Sie stellen diejenige Kraft dar, die man im Schalenmodell (s. Anm.<sup>8, 9</sup>) als Spin-Bahn-Kopplung bezeichnet. Die

beiden anderen Summanden des obigen Ausdrucks verhalten sich wie  $\vec{s}_i \vec{l}_k$  und stellen eine Kopplung des Bahndrehimpulses eines Nukleons mit dem Spin eines anderen dar. Bei der Bestimmung der Eigenwerte der Energie sind die Matrixelemente der letzteren Anteile im Vergleich zu denen der ersten von untergeordneter Bedeutung, da sie für die verschiedenen Annäherungsfunktionen eines Kernzustandes sich nur wenig unterscheiden (im Gegensatz zu den Matrixelementen der ersten Anteile, deren Verhalten weiter unten in Gl. (45) dargestellt wird). Da sich außerdem  $\alpha$  als wesentlich kleiner erweisen wird als die Konstanten  $w, h, b$  und  $m$  der Zentralkräfte [s. Gl. (44)], erhält man innerhalb der hier angestrebten Rechengenauigkeit die gleichen Resultate, wenn man den obigen Ausdruck vereinfacht zu:

$$V_{SB}(1,2) = \alpha \frac{V_0}{2\hbar\beta} (\vec{\sigma}_1 [\text{grad}_1 J(r_{12}) \times \vec{p}_1] + \vec{\sigma}_2 [\text{grad}_2 J(r_{12}) \times \vec{p}_2]) \quad (41)$$

$\alpha$  ist eine positive Konstante. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß eine Parallelstellung von Spin und Bahndrehimpuls der Teilchen energetisch bevorzugt wird. Diese Wahl des Vorzeichens konnte in den oben erwähnten Arbeiten<sup>8, 9</sup> mit großer Sicherheit aus dem empirischen Material festgelegt werden.

Weil eine genaue Kenntnis der Ortsfunktion  $J(r_{12})$  bis heute nicht vorhanden ist, soll die einfache und einleuchtende Annahme gemacht werden, daß die Spin-Bahn-Kopplungskraft die gleiche Reichweite und dieselbe Ortsabhängigkeit wie die übrigen Kräfte hat. Dann kann man die Matrixelemente der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf drei Integrale zurückführen, und erhält für diese Werte (mit der gleichen Bedeutung für  $E_0$  und  $v$ ):

$$I_1^{SB} = \alpha (v^2 - v) E_0; \\ I_2^{SB} = \alpha (v^2 + v) E_0; \\ I_3^{SB} = -\alpha v E_0. \quad (42)$$

Die Größe der positiven Konstanten  $\alpha$  bestimmt man aus der experimentell bekannten<sup>17</sup> Energiedifferenz der beiden Zustände des  $\text{He}^5$   $E(P_3) - E(P_1) \cong -2 \text{ MeV}$ . Die Matrixelemente der Zentralkräfte ergeben für diese beiden Zustände die gleiche Energie. Die Energiedifferenz kann also nur durch die

<sup>15</sup> L. Rosenfeld, Nuclear forces, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam 1948.

<sup>16</sup> H. Gaus, Z. Naturforschg. **7a**, 44 [1952].

<sup>17</sup> F. Ajzenberg u. T. Lauritsen, Rev. mod. Physics, **24**, 4: 321 [1952].

Spin-Bahn-Wechselwirkung erklärt werden. Mit Hilfe der Gl. (41) ergibt sich diese Differenz zu:

$$E(P_{\frac{3}{2}}) - E(P_{\frac{1}{2}}) = -15 \times V_0 \left( \frac{v}{2+v} \right)^{\frac{5}{2}} \cong -2 \text{ MeV.} \quad (43)$$

Benutzt man für  $v$  den Wert 1,2 (s. S. 767) und für  $V_0 = 35$  MeV, so erhält man:

$$\alpha \cong 0,04. \quad (44)$$

Es ist zu erwarten, daß bei der Mischung der Annäherungsfunktionen für die Zustände eines Kerns die Spin-Bahn-Kopplungsenergie trotz des kleinen Wertes von  $\alpha$  wesentlich eingeht. Denn die zugehörigen Matrixelemente verhalten sich<sup>16</sup> wie

$$E^{\text{SB}} = \text{const.} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -l \\ l+1 \end{array} \right\} \text{ für } j = \left\{ \begin{array}{l} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \quad (45)$$

während die Matrixelemente der Zentralkräfte im allgemeinen nur geringe Unterschiede für die einzelnen Annäherungsfunktionen aufweisen. Dieser Gegensatz verschärft sich noch durch die Wechselwirkung der  $1s$ -Nukleonen mit den  $2p$ -Nukleonen. Während die Matrixelemente der Zentralkräfte für alle  $2p$ -Nukleonenfunktionen dabei gleich sind, wie schon oben erwähnt, verhalten die der Spin-Bahn-Kopplung sich wie in Gl. (45) dargestellt.

### 5. Der Kern $\text{Li}^6$

Die in den vorliegenden Abschnitten dargestellte Methode soll nun angewendet werden, um die Zustände der Kerne und die daraus folgenden magnetischen Momente und Quadrupolmomente für die

Grundzustände zu bestimmen. Als Beispiel für die Durchführung möge die ausführliche Darstellung der Berechnung des Grundzustandes des Kernes  $\text{Li}^6$  dienen.

Der Kern  $\text{Li}^6$  besteht aus der mit vier Nukleonen besetzten, abgesättigten  $1s$ -Schale und je einem Neutron und Proton in der nicht abgeschlossenen  $2p$ -Schale. Für den Grundzustand ist experimentell der Gesamtdrehimpuls  $J = 1$  gefunden worden.

Die Anzahl der nach Abschnitt 2 gefundenen Annäherungsfunktionen ist in der folgenden Tab. 3, geordnet nach den Isotopenspins und Gesamtdrehimpulsen, zusammengestellt.

		$T = 0$				$T = 1$			
$A$	$J$	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Tab. 3.

Dabei ist  $A$ , wie schon erwähnt, die Anzahl der Nukleonenfunktionen mit antiparallelen  $\vec{l}$  und  $\vec{s}$ .

Die Rechnung der Zustände für  $J = 1$  und  $T = 0$ , unter denen sich auch der Grundzustand des Kernes  $\text{Li}^6$  befindet, soll als Beispiel genauer dargestellt werden.

Für  $J = 1$  und  $T = 0$  gibt es die drei Annäherungsfunktionen [in der Schreibweise von Gl. (15)]:

---


$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \{P_{3,1}^+; P_{3,1}^0\} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \{P_{3,3}^+; P_{3,-1}^0\} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \{P_{3,-1}^+; P_{3,3}^0\} \right], \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \{P_{1,1}^+; P_{3,1}^0\} - \sqrt{3} \{P_{1,-1}^+; P_{3,3}^0\} + \{P_{3,1}^+; P_{1,1}^0\} - \sqrt{3} \{P_{3,3}^+; P_{1,-1}^0\} \right], \\ \Phi_3 &= \{P_{1,1}^+; P_{1,1}^0\}. \end{aligned} \quad (46)$$


---

Die Reihenfolge der Funktionen ist nach der zu erwartenden Beteiligung am Grundzustand gewählt.  $\Phi_1$  enthält zwei,  $\Phi_2$  eine und  $\Phi_3$  keine Nukleonenfunktion mit parallelem  $\vec{l}$  und  $\vec{s}$ . Deshalb darf man wegen der starken Spin-Bahn-Kopplung erwarten, daß  $\Phi_1$  am stärksten und  $\Phi_3$  am schwächsten in der Mischung des Grundzustandes vertreten sein wird.

Folgende Klammersymbole sollen die Darstellung der Matrixelemente der potentiellen Energie durch

die in den Gln. (40) u. (42) eingeführten Integrale vereinfachen:

$$\binom{n'}{n'' n'''} = n' \times I_1 + n'' \times I_2 + n''' \times I_3 \quad (47)$$

und  $\binom{n'}{n'' n'''}^{\text{SB}} = n' \times I_1^{\text{SB}} + n'' \times I_2^{\text{SB}} + n''' \times I_3^{\text{SB}}$ .

Mit diesen Abkürzungen erhält man mit den oben eingeführten drei Funktionen für  $T = 0$  sowohl für

die Wigner- als auch für die Heisenberg-Kraft folgende Matrix (die symmetrischen Glieder sind hier wie in den folgenden Matrizen fortgelassen):

$$\mathfrak{B}_w = \mathfrak{B}_h =$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^w & -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} & \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{11}^w + \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} & 0 & \varepsilon_{11}^w - \frac{4}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad (48a)$$

( $\varepsilon_{11}$  ist das Diagonalelement der potentiellen Energie der Funktion  $\Phi_1$ ).

Die Diagonalelemente sind auf  $\varepsilon_{11}$  als Nullniveau der Energie bezogen, um sie besser miteinander vergleichen zu können.  $\varepsilon_{11}$  enthält neben der Wechselwirkung der  $2p$ -Nukleonen der Funktion  $\Phi_1$  auch die Wechselwirkung der  $2p$ -Nukleonen mit den  $1s$ -Nukleonen und die der  $1s$ -Nukleonen untereinander. (Die beiden letzteren lassen sich als ein Multiplet der Einheitsmatrix darstellen und kommen daher für das Eigenwertproblem nicht in Betracht.) Für die Bartlett- sowie die Majorana-Kraft heißt die entsprechende Matrix:

$$\mathfrak{B}_b = \mathfrak{B}_m =$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^b & -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} & \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{11}^b + \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} & \varepsilon_{11}^b - \frac{4}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 13 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad (48b)$$

Und schließlich die Matrix der Spin-Bahn-Kopplung:

$$\mathfrak{B}_{SB} =$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^{SB} & -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^{SB} & -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^{SB} \\ \varepsilon_{11}^{SB} - \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 11 \\ 124 \\ -102 \end{pmatrix}^{SB} & 0 & \varepsilon_{11}^{SB} - \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 16 \\ 254 \\ -222 \end{pmatrix}^{SB} \end{vmatrix} \quad (48c)$$

An den Diagonalelementen dieser fünf Matrizen erkennt man qualitativ — wenn man bedenkt, daß  $I_1, I_2, I_3, I_1^{SB}, I_2^{SB}$  negative Größen und  $I_3^{SB}$  eine positive Größe ist — die Bevorzugung der Funktion

$\Phi_2$  durch  $V_w, V_h, V_m$  und  $V_b$  und eine Bevorzugung der Funktion  $\Phi_1$  durch  $V_{SB}$ .

Die Matrix für die gesamte potentielle Energie wird nun durch Addition dieser fünf Anteile und Einsetzen der Werte der Integrale  $I_1, \dots, I_3^{SB}$  gewonnen.

Damit erhält man für die Matrix der potentiellen Energie:

$$\mathfrak{B}_{pot} = w \mathfrak{B}_w + h \mathfrak{B}_h + b \mathfrak{B}_b + m \mathfrak{B}_m + z \mathfrak{B}_{SR} = E_0 \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & -\sqrt{\frac{2}{5}} 20,67 & \sqrt{\frac{2}{5}} 15,19 \\ \varepsilon_{11} - 1,92 & 3,43 & \varepsilon_{11} - 15,84 \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= (\varepsilon_{11} + 12,97) E_0, \\ \Lambda_2 &= (\varepsilon_{11} - 6,20) E_0, \\ \Lambda_3 &= (\varepsilon_{11} - 24,53) E_0. \end{aligned} \quad (50)$$

Von diesen drei Energietermen ist  $\Lambda_1$  der tiefste, der deshalb dem Energiewert des Grundzustandes entspricht. Im nächsten Abschnitt wird noch gezeigt, daß auch die Terme der übrigen Zustände energetisch ungünstiger liegen als  $\Lambda_1$ . Infolgedessen ist der zu  $\Lambda_1$  gehörige Zustand mit dem Lösungsvektor

$$\vec{\Gamma} = \left( 0,761; -\sqrt{\frac{2}{5}} 0,985; \sqrt{\frac{2}{5}} 0,282 \right) \quad (51)$$

als Grundzustand des Kernes  $Li^6$  zu betrachten. Für die Anteile der Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2$  und  $\Phi_3$  an der Mischung erhält man:

$i =$	1	2	3
$(\gamma_i)^2 =$	0,580	0,388	0,032

(52)

$\Phi_1$  ist demnach an der Mischung des Grundzustandes am meisten beteiligt. Ohne die Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung würde der Anteil von  $\Phi_1$  zugunsten des Anteils von  $\Phi_2$  kleiner sein, wie schon vorher bemerkt wurde.  $\Phi_3$  ist in der Mischung besonders schwach vertreten, weil diese Funktion nicht nur für die Spin-Bahn-Kopplung, sondern auch für die anderen Kräfte energetisch ungünstiger ist.

Mit Hilfe des Vektors (51) kann man nun aus den Matrizen für das magnetische Moment und das Quadrupolmoment die entsprechenden Erwartungswerte ermitteln.

Für das magnetische Moment erhält man die Matrix:

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) \right) & \frac{5}{6} \sqrt{\frac{2}{5}} (1 - \mu_p - \mu_n) & 0 \\ \frac{1}{4} (1 + \mu_p + \mu_n) & \frac{1}{6} (1 - \mu_p - \mu_n) & \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) \right) \end{vmatrix} \quad (53)$$

oder in Zahlen:

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \begin{vmatrix} 0,6266 & -\sqrt{\frac{2}{5}} 0,3165 & 0 \\ 0,6900 & -0,1266 & 0,3730 \end{vmatrix}, \quad (54)$$

und für das Quadrupolmoment:

$$\mathfrak{Q} = Q_0 \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Mit Gl. (51) ergeben sich die Werte:

$$\mu(\text{Li}^6) = 0,860 \mu_0 \text{ und } Q(\text{Li}^6) = 0,003 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Das experimentell gewonnene Resultat für das magnetische Moment ist<sup>18</sup>

$$\mu = 0,8219 \mu_0.$$

Für das magnetische Moment ergibt sich eine Abweichung von ungefähr 5%. Es ist zu erwarten, daß eine Berücksichtigung der hier nicht behandelten Annäherungsfunktionen höherer Energiestufen einen Beitrag dieser Größenordnung ergibt, mit dem man die noch vorhandene Abweichung von dem experimentellen Wert erklären kann.

Für das Quadrupolmoment von Li<sup>6</sup> gibt es bis jetzt nur eine Messung des absoluten Verhältnisses:  $Q(\text{Li}^6)/Q(\text{Li}^7)$  von Kusch<sup>18</sup>, aus der man entnimmt, daß das Quadrupolmoment (ungefähr) von der Größe

$$0,001 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

sein muß. Die Übereinstimmung dieses Wertes mit dem experimentellen darf im Rahmen dieser Rechnung noch als recht gut bezeichnet werden, wenn man bedenkt, daß man durch die Berücksichtigung der oben erwähnten höheren Annäherungsfunktio-

nen eine Korrektur in der Größenordnung von  $Q(\text{Li}^6)$  erwarten darf.

### 6. Die magnetischen Momente und Quadrupolmomente

Die Berechnungen der Grundzustände der übrigen stabilen Kerne der 2P-Schale und der daraus folgenden magnetischen Momente und Quadrupolmomente sollen der Kürze halber nicht ausführlich dargestellt werden. Sie sind, abgesehen von der Art und der Anzahl der Annäherungsfunktionen, Wiederholungen des im vorigen Kapitel Dargestellten. Bevor die Ergebnisse mitgeteilt werden, sei noch auf einige bei den Rechnungen auftretende Besonderheiten hingewiesen.

Da die 1S-Schale mit zwei Protonen und zwei Neutronen und die 2P-Schale mit sechs Protonen und sechs Neutronen gefüllt werden können, ist bei der Massenzahl  $A = 10$  in dem Kern B<sup>10</sup> die 2P-Schale zur Hälfte mit Protonen und Neutronen besetzt. Hieraus ersieht man, daß die Annäherungsfunktionen der Kerne mit den Massenzahlen  $A = 10 + n$  ( $1 < n < 6$ ) aus denen mit den Massenzahlen  $A = 10 - n$  abgeleitet werden können, wenn man in den letzteren die Teilchenzustände durch „Löcher“-zustände der gleichen Art ersetzt. In diesem Sinne entspricht der Kern Li<sup>6</sup> dem Kern N<sup>14</sup>, der Kern Li<sup>7</sup> dem Kern C<sup>13</sup> und der Kern Be<sup>9</sup> dem Kern B<sup>11</sup>.

Die Anzahl der Annäherungsfunktionen, die sich aus 2p-Nukleonfunktionen aufbauen lassen, ist für die einzelnen Kerne sehr verschieden. Mit steigender Massenzahl  $A$  wächst sie, vom Anfang der 2p-Schale ausgehend, ständig an, um für  $A = 10$  beim B<sup>10</sup> ihren größten Wert zu erreichen; sie fällt dann in der gleichen Weise symmetrisch bis zum Abschluß der Schale bei O<sup>16</sup>. Für die Grundzustände des Li<sup>6</sup> und N<sup>14</sup> findet man drei, für Li<sup>7</sup> und C<sup>13</sup> fünf und für Be<sup>9</sup> und B<sup>11</sup> neun Annäherungsfunktionen. Die Höchstzahl, nämlich zehn Annäherungsfunktionen, ergibt sich für den Grundzustand des Kernes B<sup>10</sup>. Für Li<sup>6</sup>, N<sup>14</sup>, Li<sup>7</sup> und C<sup>13</sup> wurden bei

<sup>18</sup> P. Kusch, Physic. Rev. 75, 887 [1953].

dem Variationsverfahren alle Annäherungsfunktionen berücksichtigt, während für  $\text{Be}^9$ ,  $\text{B}^{10}$  und  $\text{B}^{11}$  nur je fünf Funktionen zugelassen wurden, um wenigstens ungefähr eine Darstellung des Grundzustandes zu finden. Die Auswahl dieser fünf Funktionen erfolgt auf die Weise, daß man zunächst die Funktion  $\Phi_1$  mit der größtmöglichen Anzahl von Nukleonenzuständen  $\vec{l}$  parallel  $\vec{s}$  aufsucht, von der man wegen der Spin-Bahn-Wechselwirkung den größten Anteil an der Mischung des Grundzustandes erwarten darf. Dieser ist in allen berechneten Fällen größer als 60%. Die übrigen Annäherungsfunktionen werden nach folgenden Gesichtspunkten ausgewählt:

1. Es werden diejenigen Funktionen vorzüglich berücksichtigt, für die die Anzahl der beschriebenen Nukleonenzustände mit  $\vec{l}$  antiparallel  $\vec{s}$  möglichst klein ist.
2. Da man die Anzahl der Funktionen auf fünf begrenzen will, muß man die vierte und fünfte Funktion in den meisten Fällen unter solchen aussuchen, die in bezug auf die Spin-Bahn-Kopplung gleichrangig sind. Man bildet daher für die letzteren die Matrixelemente  $\langle \Phi_1 | E_{\text{pot}} | \Phi_k \rangle$  und wählt diejenigen Funktionen aus, für die dies Übergangselement am größten ist, da sie den größten Anteil an der Mischung haben werden.

Die zum Variationsverfahren nicht zugelassenen Funktionen haben jedenfalls wesentlich kleinere Anteile als die hier berücksichtigten und spielen daher bei der Bestimmung des magnetischen Momentes und des Quadrupolmomentes eine untergeordnete Rolle.

In Tab. 4 werden die berechneten Werte für die magnetischen Momente und Quadrupolmomente mit den experimentellen Werten verglichen. Die letzteren sind aus der Arbeit von Mack<sup>1</sup> entnommen. Außer den Werten für die oben angeführten Kerne sind die für den stabilen Kern  $\text{N}^{15}$  eingetragen, die ohne das Variationsverfahren berechnet werden können, da sich für den Grundzustand nur eine Annäherungsfunktion ergibt.

Die berechneten magnetischen Momente stimmen mit den experimentellen im Vergleich zu den Werten des Schmidt-Schüler-Modells, das für die Kerne der  $2P$ -Schale durchschnittlich eine Genauigkeit von ca. 20% ergibt, wesentlich besser überein. (Der große Fehler bei  $\text{N}^{14}$  wird weiter unten

diskutiert.) Auch für die Quadrupolmomente ergeben sich befriedigende Resultate.

	$\mu_{\text{ber.}} / \mu_0$	$\mu_{\text{exp.}} / \mu_0$	Fehler in %	$Q_{\text{ber.}}$ $10^{-24} \text{ cm}^2$	$Q_{\text{exp.}}$ $10^{-24} \text{ cm}^2$
$\text{Li}^6$	0,860	0,822	5	0,003	$\sim 0,001$
$\text{Li}^7$	3,301	3,256	2	— 0,02	— 0,02
$\text{Be}^9$	— 1,136	— 1,177	4	0,01	0,02
$\text{B}^{10}$	1,883	1,800	5	0,07	0,06
$\text{B}^{11}$	2,739	2,629	4	0,02	0,03
$\text{C}^{13}$	0,657	0,702	6	0	0
$\text{N}^{14}$	0,332	0,404	18	0,01	$\sim 0,02$
$\text{N}^{15}$	— 0,265	— 0,283	6	0	0

Tab. 4.

Der experimentelle Wert des Quadrupolmomentes für  $\text{Li}^7$  ist von Kusch<sup>18</sup> angegeben worden. In einer späteren Korrektur dieses Autors<sup>19</sup> findet sich der gleiche Wert  $|Q(\text{Li}^6)/Q(\text{Li}^7)|$ , aber mit positivem Vorzeichen. Dies stimmt schlecht mit der experimentellen Regel überein, daß die Quadrupolmomente der Kerne nach abgeschlossenen Schalen negatives Vorzeichen haben sollen. Auch deutet der experimentelle Wert  $\mu(\text{Li}^7) = 3,26 \mu_0$  darauf hin, daß die von der Spin-Bahn-Wechselwirkung am meisten begünstigte Funktion  $\Phi_1$ , die, allein berücksichtigt, für das magnetische Moment den Wert  $3,04 \mu_0$  und für das Quadrupolmoment  $-0,022 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  ergeben würde, erheblich an der Mischung des Grundzustandes beteiligt sein muß. Deshalb darf man schon ohne genauere Rechnung ein negatives Vorzeichen erwarten. Eine weitere experimentelle Überprüfung des Vorzeichens wäre wünschenswert.

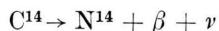
Obwohl die Grundzustände der Kerne  $\text{Be}^9$ ,  $\text{B}^{10}$  und  $\text{B}^{11}$  nur durch fünf Funktionen angenähert wurden, ergibt sich noch eine gute Übereinstimmung mit dem empirischen Material. Den Grund dafür findet man, wenn man berücksichtigt, daß für alle Matrizen  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{M}$  der drei Kerne die Matrixelemente

$$\langle \Phi_1 | \mathfrak{M} | \Phi_k \rangle \text{ und } \langle \Phi_1 | \mathfrak{Q} | \Phi_k \rangle \text{ (für } k > 5)$$

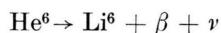
<sup>18</sup> P. Kusch, Physic. Rev. **76**, 138 [1953].

verschwinden, und außerdem bedenkt, daß gerade die Matrixelemente der ersten Zeile die Hauptbeiträge liefern. Das letztere hat seine Ursache in der Tatsache, daß wegen der Spin-Bahn-Wechselwirkung  $\gamma_1$  immer beträchtlich größer ist als alle anderen  $\gamma_k$ .

Der berechnete Wert des magnetischen Momentes für  $N^{14}$  weicht um  $0,072 \mu_0$  von dem experimentellen ab. Betrachtet man diesen Wert relativ zur Größe des magnetischen Momentes, so erscheint der Fehler beträchtlich. Jedoch sind gerade für kleine Werte des magnetischen Momentes wesentliche Beiträge durch die Berücksichtigung der höheren Annäherungsfunktionen zu erwarten. Glücklicherweise ist man in der Lage, die Grundeigenfunktion von  $N^{14}$  noch auf eine andere Art zu überprüfen. Man kann nämlich, wenn noch der Grundzustand des Kernes  $C^{14}$  mit den Methoden dieser Arbeit bestimmt wird, die Übergangswahrscheinlichkeit für den  $\beta$ -Zerfall



theoretisch bestimmen, der für seine extrem hohe Halbwertszeit ( $4 \cdot 10^3$  Jahre) bekannt ist. Diese Halbwertszeit ist deshalb besonders bemerkenswert, weil es sich dabei nach Gamow-Teller um einen „erlaubten“ Übergang handelt, für den man zunächst eine Halbwertszeit von der Größenordnung sec nach den allgemeinen Regeln des  $\beta$ -Zerfalls erwartet. Solche Rechnungen wurden zusammen mit Herrn Ferrell, Göttingen, durchgeführt. Sie liefern tatsächlich die lange Lebensdauer von  $C^{14}$  und vermögen unter anderem auch das unterschiedliche Verhalten des verwandten  $\beta$ -Übergangs



zu erklären.

Die Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung liefert offenbar bessere Ergebnisse als solche Methoden, die nur die Zentralkräfte annehmen. So ergibt sich z. B. für das magnetische Moment des  $C^{13}$  statt  $0,657 \mu_0$ , wie oben berechnet, der Wert  $1,24 \mu_0$ , wenn man die Spin-Bahn-Wechselwirkung nicht berücksichtigt. (Bethe und Rose<sup>4</sup> erhalten hier allerdings  $1,13 \mu_0$ , da sie  $\mu_p = 5,70 \mu_0$  und  $\mu_n = -4,00 \mu_0$  statt der Werte auf S. 765 zugrunde legen.)

## 7. Die angeregten Zustände der Kerne $Li^6$ , $Li^7$ , $C^{13}$ und $N^{14}$

Das in Abschnitt 1 eingeführte Variationsverfahren ermöglicht, wie dort schon bemerkt, außer der Auffindung des Grundzustandes die Berechnung der

angeregten Zustände. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß die Anzahl der Energieterme, die sich bei  $n$  Annäherungsfunktionen als Eigenwerte eines Eigenwertproblems  $n$ -ter Ordnung ergeben, nur durch die Anzahl der Annäherungsfunktionen bestimmt ist und nicht von der Art der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen abhängt. Von der letzteren wird die Lage der Terme der angeregten Zustände festgelegt.

Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß an der Darstellung der Zustände mit mehr als 5 MeV Anregungsenergie die höheren Annäherungsfunktionen beteiligt sein müssen. Z. B. findet man bei den Kernen  $N^{15}$  und  $O^{16}$  (s. Anm. <sup>20</sup>) mit 5 MeV bis 6 MeV angeregte Zustände, in denen sich Nukleonen in höheren als  $2P$ -Zuständen befinden. Man darf daher bei dem hier angewandten Verfahren für mehrere Zustände, die es evtl. für einen bestimmten Gesamtdrehimpuls  $J$  und einen Isotopenspin  $T$  gibt, nur für die unteren, höchstens etwa 4 MeV über dem tiefsten Term liegenden Zustände eine Übereinstimmung mit dem Experiment erwarten. Am genauesten kann infolgedessen der jeweils tiefste Zustand zu einem bestimmten Gesamtdrehimpuls  $J$  und Isotopenspin  $T$  durch die Rechnung aufgefunden werden. Eine empfindliche Probe für diese Zustände ist die Bestimmung der  $(ft)$ -Werte für die  $\beta$ -Übergänge vieler leichter Kerne. Diese führten, wie schon eben für den Kern  $C^{14}$  erwähnt, zu befriedigenden Resultaten.

Die in den nachfolgenden Zeichnungen eingetragenen Energieterme sind nach Gesamtdrehimpulsen und Isotopenspins geordnet. Der Grundzustand (jeweils als Nullniveau angenommen) hat immer den kleinstmöglichen Isotopenspin, denn die Zustände höheren Isotopenspins entsprechen energetisch, abgesehen von der Coulomb-Energie, den Zuständen der entsprechenden isobaren Kerne, deren Energie auch bei Berücksichtigung der im Vergleich zu den Kernkräften kleinen Coulomb-Energie stets höher liegt. Auf diesen Zusammenhang soll noch bei der Besprechung der einzelnen Termschemata näher hingewiesen werden.

### a) Die Kerne $Li^6$ , $Be^6$ , $He^5$

Über die Anzahl der Annäherungsfunktionen des Kernes  $Li^6$  wurde bereits auf S. 768 gesprochen. Im ganzen ergaben sich theoretisch fünf Zustände mit

<sup>20</sup> H. Kopfermann, Naturwiss. 1, 29 [1951].

dem Isotopenspin  $T = 0$  und fünf Zustände mit dem Isotopenspin  $T = 1$ . Die letzteren entsprechen gleichzeitig der Anzahl der Annäherungsfunktionen der Kerne Be<sup>6</sup> und He<sup>6</sup>.

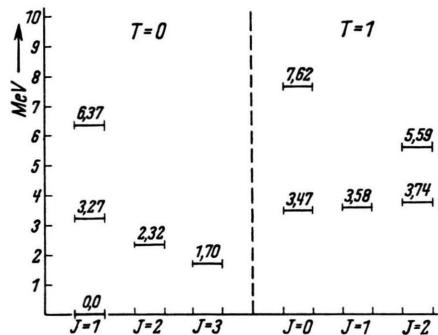


Abb. 1. Termschema des Kerns Li<sup>6</sup>.

In Abb. 1 sind in einem Termschema alle zehn für Li<sup>6</sup> möglichen Zustände mit ihren Energie-Eigenwerten in MeV-Einheiten eingetragen. Wie über die Konstanten  $w$ ,  $h$ ,  $b$  und  $m$  verfügt worden ist, wurde bereits auf S. 766 und 768 besprochen. Der Zustand  $J = 0; T = 1$  stimmt daher mit dem experimentellen Wert überein. Außerdem ist experimentell ein Zustand bei 2,20 MeV bekannt, der mit großer Sicherheit dem Term  $T = 0; J = 2$  zugeordnet werden kann. Die Zustände der Kerne He<sup>6</sup> und Be<sup>6</sup> werden gleichzeitig durch die Terme mit dem Isotopenspin  $T = 1$  dargestellt. Ihre Matrixelemente für die Gesamtenergie sind nämlich, abgesehen von der Coulomb-Energie, die gleichen wie die der Zustände mit  $T = 1$ .

Wie hier, so läßt sich allgemein für leichte Kerne, bei denen die Coulomb-Energie noch nicht so sehr ins Gewicht fällt, sagen, daß Terme mit höherem Isotopenspin energetisch ungünstiger liegen; dies hängt mit der Fermi-Statistik der Nukleonen zusammen.

Merkwürdigerweise findet man nicht nur bei Li<sup>6</sup>, sondern auch bei den anderen leichten Kernen experimentell bedeutend weniger angeregte Zustände, als vom Standpunkt der Theorie zu erwarten wäre. In dem obigen Termschema kann z. B. nicht erklärt werden, daß die beiden Terme zu  $T = 0, J = 1$ ;  $E_A = 3,27$  MeV bzw.  $T = 0, J = 3$ ;  $E_A = 1,70$  MeV experimentell nicht aufgefunden werden. Es wird eine weitere Aufgabe der Theorie sein, genauer zu erklären, warum nur einige der möglichen Zustände bei Kernprozessen in Erscheinung treten.

### b) Die Kerne Li<sup>7</sup>, Be<sup>7</sup>, He<sup>7</sup>

Mit den Methoden des Abschnittes 4 erhält man für die Anzahl der Annäherungsfunktionen nach  $J$ ,  $T$  und  $A$  ( $A$  = Anzahl der Protonen- und Neutronenzustände mit  $\vec{l}$  antiparallel  $\vec{s}$ ) geordnet (Tab. 5):

$T = \frac{1}{2}$				$T = \frac{3}{2}$				
$A \backslash J$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	2	2	2	1	1	1	1	0
2	1	2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 5.

Da Li<sup>7</sup> und Be<sup>7</sup> Spiegelkerne sind, gilt für beide die Tab. 5. Die rechte Seite gibt gleichzeitig die Anzahl der Annäherungsfunktionen für die isobaren Kerne He<sup>7</sup> und Be<sup>7</sup> an, die allerdings wegen ihrer hohen Instabilität keine praktische Bedeutung haben.

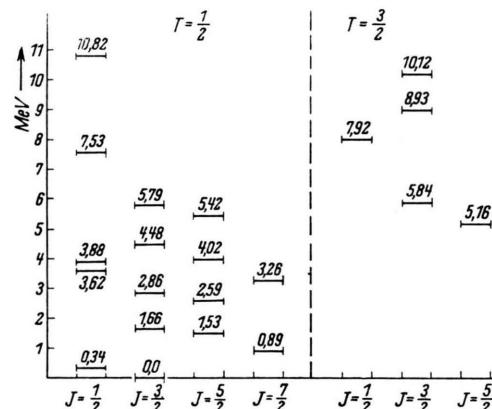


Abb. 2. Termschemata der Kerne Li<sup>7</sup>, Be<sup>7</sup>, He<sup>7</sup>.

Der unterste Term (s. Abb. 2) der Zustände mit  $J = 1/2, T = 1/2$  liegt nach der Rechnung nur etwa 0,34 MeV über dem Nullniveau. Dieser Wert wird angenähert durch das Experiment bestätigt. Für Li<sup>7</sup> ist ein angeregter Zustand mit  $J = 1/2$  und der Anregungsenergie 0,47 MeV bekannt.

Die Terme mit  $T = 3/2$ , die auch den Zuständen von He<sup>7</sup> und Be<sup>7</sup> entsprechen, liegen energetisch sehr ungünstig, was der Instabilität dieser Kerne entspricht. Aus demselben Grunde darf man erwarten, daß man wohl kaum angeregte Zustände der Kerne Li<sup>7</sup> und Be<sup>7</sup> mit höherem Isotopenspin als  $T = 1/2$  experimentell finden wird.

Gerade für den Kern  $\text{Li}^7$  ist es auffallend, daß im Experiment sehr viel weniger Zustände aufgefunden wurden, als man vom Standpunkt der Theorie erwarten müßte. Außer dem oben erwähnten angeregten Zustand von 0,47 MeV sind keine weiteren unter 5 MeV bekannt. Man kann untersuchen, ob man durch andere Annahmen über die Wechselwirkung und die Annäherungsfunktionen, wie sie in obiger Rechnung verwendet wurden, eine bessere Übereinstimmung erhalten kann. Durch eine andere Wahl der Konstanten  $w$ ,  $b$ ,  $h$  und  $m$  wird jedoch nur eine Änderung der relativen Lagen, aber keine Veränderung der Anzahl der Energieterme erreicht. Zudem würden dadurch die z. T. guten Ergebnisse für die anderen Kerne aufgehoben. Auch eine wesentliche Vergrößerung des Wertes für  $a$  (s. S. 763), durch die eine höhere Lage aller Terme der angeregten Zustände erreicht werden könnte, ist nicht möglich, da  $a$  ziemlich genau durch die Energiedifferenz der Spiegelkerne  $\text{Li}^7$  und  $\text{Be}^7$  festgelegt ist. Es bleibt daher nur die Möglichkeit, das Nichterscheinen einiger weiterer angeregter Zustände von  $\text{Li}^7$  unterhalb von 5 MeV im Experiment durch kleine Übergangswahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Prozesse zu erklären. Es wäre denkbar, daß die Berechnung der Übergangselemente der bisher für das  $\text{Li}^7$  angewandten Kernprozesse eine Klärung dieser Sachlage bringen könnte.

### c) Die Kerne $\text{C}^{13}$ und $\text{N}^{13}$

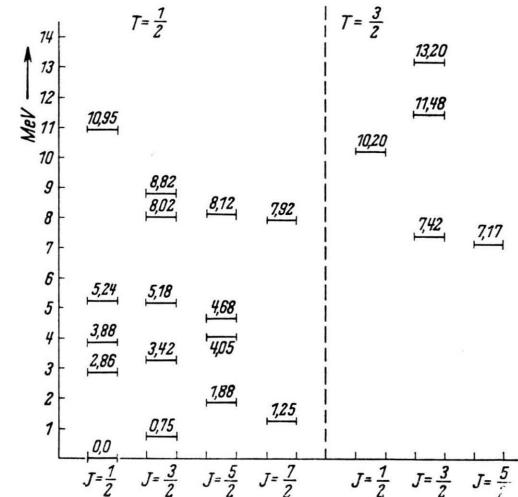
Die Anzahl der Annäherungsfunktionen hierfür zeigt Tab. 6.

$T = \frac{1}{2}$				$T = \frac{3}{2}$				
$A \backslash J$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	1	0	1	1	0
3	2	2	2	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	0	1	0	0

Tab. 6.

Das Termschema der Kerne  $\text{C}^{13}$  und  $\text{N}^{13}$  zeigt Abb. 3. Experimentell ist eine relativ große Anzahl von angeregten Zuständen bekannt. Die drei tiefsten unter ihnen lassen sich theoretisch berechneten Termen zuordnen.

Experimentell bekannt:		Theoretisch:	
Energie	Drehimpuls	Energie	Drehimpuls
1. 0,7 MeV	unbekannt	0,75 MeV	$\frac{3}{2}$
2. 3,09 MeV	$\frac{1}{2}$	2,86 MeV	$\frac{1}{2}$
3. 3,69 MeV	( $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ )	3,42 MeV	$\frac{3}{2}$

Abb. 3. Termschemata der Kerne  $\text{C}^{13}$ ,  $\text{N}^{13}$ .

Die übrigen elf experimentell gefundenen angeregten Energiezustände, die im Bereich von 4,0 bis 9,0 MeV liegen, lassen sich wegen der Unsicherheit der Rechnung mit den theoretischen Werten nicht eindeutig vergleichen. Man muß nämlich, wie schon bemerkt, für diese Energiestufen die Einwirkung der in dieser Rechnung vernachlässigten höheren Annäherungsfunktionen in Betracht ziehen. In diesem Bereich stimmt aber immerhin die gefundene Termdichte mit der Erfahrung überein.

Die Zustände mit dem Isotopenspin  $T = 3/2$  liegen auch hier sehr hoch, so daß man eine große Instabilität für sie und die isobaren Kerne  $\text{B}^{13}$  und  $\text{O}^{13}$  erwarten muß.

### d) Die Kerne $\text{N}^{14}$ , $\text{O}^{14}$ und $\text{C}^{14}$

Die Anzahl der Annäherungsfunktionen ist aus Tab. 7 zu ersehen; sie gibt gleichzeitig die Anzahl

$T = 0$				$T = 1$				
$A \backslash J$	0	1	2	3	0	1	2	3
2	0	1	0	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1	0
4	0	1	0	1	1	0	1	0

Tab. 7.

der Annäherungsfunktionen der isobaren Kerne C<sup>14</sup> und N<sup>14</sup> an. Das Termschema des Kerns N<sup>14</sup> zeigt Abb. 4.

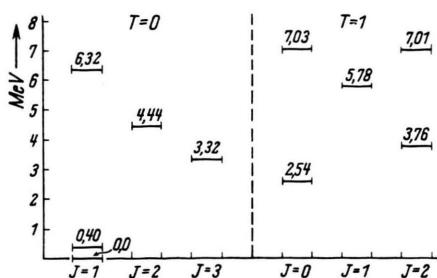


Abb. 4. Termschema des Kerns N<sup>14</sup>.

Der Vergleich mit dem Termschema des Kernes Li<sup>6</sup> zeigt für  $J = 0$  und  $T = 1$  eine Senkung der unteren Energieniveaus. Dies entspricht dem umgekehrten Verhalten der Spin-Bahn-Wechselwirkung in den Diagonal-Elementen. Besonders deutlich sieht man dies an den entsprechenden Termen für  $J = 3, T = 0$ . Bei Li<sup>6</sup> liegt dieser Term im unteren Teil des Schemas, bei N<sup>14</sup> liegt er im mittleren. Die Terme für  $J = 1$  und  $J = 2$  sind weniger gut mit einander vergleichbar.

Empirisch ist ein angeregter Zustand mit 2,31 MeV bekannt, der mit großer Sicherheit dem theoretischen Term  $J = 0, T = 1$  mit 2,54 MeV zugeordnet werden kann. Ein weiterer Zustand mit 3,90 MeV stimmt wahrscheinlich mit dem Term  $J = 2, T = 1$  und 3,76 MeV überein.

Im Bereich von 5 MeV bis 7 MeV gibt es weitere angeregte Zustände, die aber wegen der schon erwähnten Unsicherheit der Rechnung mit den fünf theoretisch gefundenen Termen noch nicht identifiziert werden können. Jedenfalls stimmt die Termdichte auch hier ungefähr mit der Erfahrung überein.

Die Terme mit dem Isotopenspin  $T = 1$  stellen gleichzeitig auch die Zustände der Kerne C<sup>14</sup> und O<sup>14</sup> dar. Für den Kern C<sup>14</sup> sind zwei angeregte Zustände 4 MeV oberhalb seines Grundzustandes be-

kannt, die durch die unteren Terme  $J = 0$  und  $J = 1$  qualitativ richtig wiedergegeben werden.

### Schlußbemerkung

In den Rechnungen dieser Arbeit konnten die magnetischen Momente und Quadrupolmomente der Kerne der 2p-Schale in relativ guter Übereinstimmung mit den Meßwerten gefunden werden. Der Vergleich der Resultate mit den Werten der Schmidt-Schüler-Kurven, die auf der Annahme einer vollständigen ( $j j$ )-Kopplung fußen, zeigt, daß die wirklichen Zustände der leichten Kerne einer mittleren Kopplung zwischen den beiden Extremen, der ( $j j$ )-Kopplung und der Russell-Saunders-Kopplung, entsprechen.

Die noch vorhandenen Fehler sind vor allem auf drei Ursachen zurückzuführen. Zunächst fehlt eine genauere Kenntnis der wirklichen Wechselwirkung der Nukleonen untereinander und dann beeinflußt die Vernachlässigung der höheren Annäherungsfunktionen besonders die Resultate für kleine magnetische Momente und Quadrupolmomente. Weiter ist noch die Veränderung der magnetischen Momente der Nukleonen von etwa 5% durch das Mesonenfeld der Kerne in Betracht zu ziehen. Man darf jedoch annehmen, daß es mit der angewandten Methode möglich ist, die magnetischen Momente bis auf eine Genauigkeit von  $\pm 0,1 \mu_0$ , die Quadrupolmomente bis auf  $\pm 0,005 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  und die Grundzustände bis auf  $\pm 5\%$  darzustellen.

Es wird die Aufgabe einer zukünftigen Arbeit sein, weitere empirische Daten über leichte Kerne zur Verfeinerung des Potentialansatzes heranzuziehen. Da die in der Arbeit verwandte Methode besonders für die Grundzustände der leichten Kerne geeignet ist, wird man erwarten dürfen, daß man vor allem die empirisch bekannten, erlaubten  $\beta$ -Übergänge dieser Kerne verwenden kann, um weitere Kenntnisse über die Wechselwirkung der Nukleonen zu gewinnen.

Ich möchte Herrn Professor Heisenberg für zahlreiche Anleitungen und Diskussionen danken.